

Tema 5: Estimación puntual, por intervalo y contraste de hipótesis

Nota: Estos son los ejercicios propuestos para este tema. Los que tienen referencia bibliográfica están resueltos en dicha referencia por lo que se recomienda acudir allí en caso de dudas. En clase corregiremos algunos (todos los que nos dé tiempo). Se recomienda, además, hacer más ejercicios (a vuestra propia elección) de la bibliografía recomendada en la asignatura.

Ejercicio 5.1 Ej. 6.25 [Spiegel et al., 2013]

Se hacen n observaciones, X_1, X_2, \dots, X_n a partir de una población normalmente distribuida de la que se conoce la varianza pero no la media. Encontrar el estimador de máxima verosimilitud de la media.

Ejercicio 5.2 Prob. 2.2 [Olarrea Busto and Cordero Gracia, 2007]

Sea X una v.a. con función de densidad

$$f(x) = \frac{\theta}{(1+x)^{1+\theta}} \quad x > 0, \theta > 0.$$

Ejercicio 5.3 Ej. 6.57 [Spiegel et al., 2013]

Una población tiene una función de densidad dada por

$$f(x) = \begin{cases} (k+1)x^k & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

Determinar el estimador de máxima verosimilitud para n observaciones X_1, X_2, \dots, X_n .

Ejercicio 5.4 Ej. 2.1 [Olarrea Busto and Cordero Gracia, 2007] En condiciones óptimas un proceso de fabricación produce arandelas con un diámetro en milímetros que sigue una distribución $N(10, 1'2)$. Después de un desajuste se ha obtenido la siguiente muestra:

10'34 10'50 10'80 10'90 10'98 11'23 11'38 11'49 11'66 12'04
 12'06 12'08 12'12 12'16 12'30 12'40 12'64 12'75 12'75 12'94
 12'97 13'04 13'05 13'06 13'06 13'25 13'39 13'85 14'18 14'44

Si admitimos que la varianza del proceso no ha cambiado, calcular una estimación puntual de la media μ del nuevo proceso y un intervalo de confianza del 95%. ¿Qué tamaño muestral deberíamos utilizar para que el error no sea superior a 0'2 mm?

Ejercicio 5.5 Ej. 6.11 [Spiegel et al., 2013]

En una muestra de 10 mediciones del diámetro de una esfera se obtuvo una media de $\bar{x} = 11'13$ cm y una desviación estándar de $s = 0'15$ cm. Determinar el intervalo de confianza para a) 95% y b) 99% del diámetro real, asumiendo que el diámetro sigue una distribución normal.

Ejercicio 5.6 *Ej. 6.13 [Spiegel et al., 2013]*

Una muestra de una encuesta de 100 votantes, elegida de manera aleatoria a partir de todos los votantes de un distrito dado, indica que 55% de ellos estaban a favor de cierto candidato. Calcular el intervalo de confianza para a) 95% y b) 99%

Ejercicio 5.7 *Ej. 6.21 [Spiegel et al., 2013]*

La desviación estándar de las estaturas de 16 estudiantes varones elegidos de manera aleatoria en una escuela con 1000 estudiantes varones es de 6'1 cm. Calcular el intervalo de confianza para a) 95% y b) 99%, de la desviación estándar de todos los estudiantes varones de la escuela suponiendo que la estatura está normalmente distribuida.

Ejercicio 5.8 *Ej. 6.8 [Spiegel et al., 2013]*

Al medir el tiempo de reacción, un psicólogo estima que la desviación estándar es de 0'05 segundos. ¿De qué tamaño debe ser la muestra de medidas para tener una confianza de a) 95% y b) 99%, y que el error en la estimación de la media del tiempo de reacción no exceda 0'01 segundos?

Ejercicio 5.9 *Ej. 2.3 [Olarrea Busto and Cordero Gracia, 2007]*

Plantear un contraste para saber si una moneda está equilibrada, con un tamaño de muestra $n = 100$ y nivel de significación del 1%.

Ejercicio 5.10 *Ej. 7.5 [Spiegel et al., 2013]*

En un experimento sobre percepción extrasensorial (PES) se pide a un sujeto sentado en un cuarto indicar el color (rojo o azul) de una carta seleccionada de una baraja de 50 cartas bien barajadas por un individuo situado en otro cuarto. El primer sujeto no sabe cuántas cartas rojas y azules hay en la baraja. Si identifica correctamente 32 cartas, determinar si los resultados son significativos a un nivel de significación de a) 0'05 y b) 0'01.

Ejercicio 5.11 *Probl 5 [Olarrea Busto and Cordero Gracia, 2007]*

En cierta ciudad se van a presentar dos candidatos A y B a las elecciones municipales.

a) El candidato A le pide a una empresa que le calcule una estimación de la proporción de votos en forma de intervalos con una confianza del 95% y una semiamplitud no superior a 0'10. ¿A cuánta gente debe muestrear la empresa para poder satisfacer la condición del candidato? (Sol. correcta, $n \geq 97$)

b) Una vez realizadas las elecciones el candidato A obtiene un 58% de los votos emitidos, convirtiéndose en el nuevo alcalde. Un año después se realiza una encuesta a 150 habitantes de la misma ciudad que resulta en una proporción estimada de votos para el alcalde en las próximas elecciones del 53%. ¿Se puede concluir a un nivel de significación 0'05 que la intención de voto ha bajado? (Sol. correcta: no podemos asegurar, con un nivel de significación 0'05, que la intención de voto haya bajado)

Ejercicio 5.12 *El fabricante de una esperada vacuna afirmó que la misma fue un 90% eficaz para evitar la infección del virus. En una muestra de 200 personas expuestas al virus, la vacuna evitó la infección en 160 personas. Determinar si la afirmación del fabricante es legítima con base en un nivel de significación de 0'01*

Ejercicio 5.13 *Probl 4 [Olarrea Busto and Cordero Gracia, 2007]*

Una máquina en régimen de funcionamiento normal produce arandelas con un diámetro que sigue una distribución $N(\mu, \sigma)$, con $\mu = 12$ cm y $\sigma = 2$ cm. La máquina se estropea y, después de arreglarla, se decide extraer una muestra para verificar si se ha producido un descentrado, es decir, si se ha desplazado la media μ . De una muestra de $n = 20$ arandelas el diámetro medio ha resultado $\bar{x} = 12'50$ cm. Se pide:

- El intervalo de confianza del 95% para la media de la producción actual.
- ¿Cuántas arandelas deberíamos estudiar para que la amplitud del intervalo del apartado anterior no exceda de 1'50 cm?
- Con la muestra estudiada, ¿se puede concluir que ha habido un cambio en la producción?

Ejercicio 5.14 Ej. 7.17 [Spiegel et al., 2013]

Una prueba de la resistencia a la ruptura de 6 cuerdas que fabrica una compañía mostró una resistencia a la ruptura media de 3515 kg y una desviación estándar de 65'8 kg, mientras que el fabricante afirma una resistencia a la ruptura de 3630 kg. ¿Es posible respaldar la afirmación del fabricante a un nivel de significación de a) 0'05 y b) 0'01?

Ejercicio 5.15 Ejemplo 7.6.1 [San Segundo and Marvá, 2016]

Para que un lote de tornillos sea aceptable, la desviación típica de sus longitudes no debe superar los 0'2 mm. Para examinar un lote de 5000, hemos tomado una muestra aleatoria de 15 tornillos, y hemos obtenido una cuasidesviación típica igual a 0'24 mm. ¿Estamos justificados, con un nivel de significación 0'05, para rechazar la hipótesis nula $H_0 = \{\sigma \leq \sigma_0\}$ (donde $\sigma_0 = 0'2$ mm)?

Ejercicio 5.16 Probl 10 [Olarrea Busto and Cordero Gracia, 2007]

Un tipógrafo asegura que el número medio de errores por página que comete es 2, mientras que su editor sospecha que es mayor. Suponiendo que el número de errores por página sigue una distribución de Poisson y que en una muestra de 200 páginas se encontraron 450 errores, especificar las hipótesis nula y alternativa del contraste y realizar el contraste con un nivel de significación del 5%

Ejercicio 5.17 Ej. 7.20 [Spiegel et al., 2013]

En el pasado, la desviación estándar de los pesos de ciertos paquetes de 1100'0 g que se llenaban mediante una máquina era de 7'0 g. Una muestra aleatoria de 20 paquetes mostró una cuasidesviación estándar de 9'1 g. ¿Es el aumento en la variabilidad significativo a un nivel de significación de a) 0'05 y b) 0'01?

Ejercicio 5.18 Ej. 2.7 [Olarrea Busto and Cordero Gracia, 2007]

De 1000 familias con 5 hijos cada una se ha analizado la distribución de la variable $X \equiv$ número de hijos varones, obteniéndose los siguientes resultados:

X	0	1	2	3	4	5
Nº familias	26	162	309	321	153	29

¿Se puede afirmar, con un nivel de significación 0'05, que la variable X sigue una distribución binomial $B(5, 0'5)$?

Ejercicio 5.19 Ej. 7.39 [Spiegel et al., 2013]

En sus experimentos con guisantes, Mendel observó 315 redondos y amarillos, 108 redondos y verdes, 101 arrugados y amarillos y 32 arrugados y verdes. De acuerdo con su teoría de la herencia, los números deben estar en la proporción $9 : 3 : 3 : 1$. ¿Existe alguna evidencia para dudar de su teoría a un nivel de significación de a) $0'01$ y b) $0'05$?

Ejercicio 5.20 Prob. 16 [Olarrea Busto and Cordero Gracia, 2007]

Se han tomado 1000 medidas de una variable aleatoria cuyos resultados se han agrupado en la siguiente tabla

Intervalos	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50
Nº de medidas	64	242	390	238	66

¿Podría aceptarse, con un nivel de significación de $0'05$, que los datos provienen de una distribución normal?

Referencias

- [Olarrea Busto and Cordero Gracia, 2007] Olarrea Busto, J. and Cordero Gracia, M. (2007). *Inferencia estadística. 20 problemas útiles*. García-Maroto Editores S. L.
- [San Segundo and Marvá, 2016] San Segundo, F. and Marvá, M. (2016). *PostData 1.0. Un curso de introducción a la Estadística, pensado para principiantes*. [<https://postdata-statistics.com/>].
- [Spiegel et al., 2013] Spiegel, M. R., Schiller, J., and Srinivasan, R. A. (2013). *Probabilidad y estadística*. Schaum. Mc Graw Hill.